मैक्सवेल समीकरण एवं विद्युतचुम्बकीय तरंगे

हेतुः बी0एससी0–द्वितीय वर्ष, भौतिक विज्ञान, द्वितीय प्रश्नपत्र

द्वाराः डा0 धर्मेन्द्र कुमार पाण्डेय,

भौतिक विज्ञान विभाग, पंडित पृथी नाथ पी0जी0कालेज, कानपुर

इमेलः dr.dkpandey@gmail.com

विषयवस्तुः विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र से सम्बन्धित नियम एवं समीकरण तथा समय परिवर्ती विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र की मात्रात्तमक एवं गुणात्मक व्याख्या।

प्रिय छात्रों,

आज के परिचर्चा का विषय विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र से सम्बन्धित नियम एवं समीकरण तथा समय परिवर्ती विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र की मात्रात्तमक एवं गुणात्मक व्याख्या से सम्बन्धित है।

जब कोई आवेश या आवेश समुदाय स्थिर होता है तो उसके चारों ओर का वह परिक्षेत्र जहॉं कोई अन्य आवेश अपने ऊपर बल का अनुभव करता है, आवेश या आवेश समुदाय का विद्युत क्षेत्र कहलाता है। साथ ही यह विद्युत क्षेत्र समय के साथ अपरिवर्तित तथा स्थिति निर्भर होता है। इस क्षेत्र तीव्रता के परिमाण व दिशा को कूलॉम या गॉउस के नियमानुसार ज्ञात किया जा सकता है। चूकि यह क्षेत्र अघूर्णीय होता है अतः यह क्षेत्र अदिश विद्युत विभव के ग्रेडियंट के ऋणात्मक मान के बराबर होता है अर्थात् $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_e$ तथा प्वांशन समीकरण $(\nabla^2\phi_e = -\rho/\varepsilon_0)$ का पालन करता है।

इसी प्रकार जब कोई आवेश स्थिर चाल से गतिशील होता है (अर्थात् $d\rho/dt = 0$ या $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$) तो उसके चारों ओर का वह परिक्षेत्र जहॉं कोई चुम्बकीय द्विध्रुव (कम्पॉस) अपने ऊपर बलयुग्म का अनुभव करता है, चुम्बकीय क्षेत्र कहलाता है। यह क्षेत्र भी समय के साथ अपरिवर्तित तथा स्थिति निर्भर होता है। इस क्षेत्र की तीव्रता को बायोसेवर्ट अथवा एम्पियर के नियमानुसार ज्ञात किया जा सकता है। चूकि यह क्षेत्र सामान्यतया घूर्णीय होता है अतः यह क्षेत्र सदिश चुम्बकीय विभव के कर्ल के बराबर होता है अर्थात $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ तथा समीकरण $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$ का पालन करता है। कुछ स्थितियों में (जैसे चुम्बकीय द्विध्रुव) इस क्षेत्र की तीव्रता को अदिश चुम्बकीय विभव के ग्रेडियंट के ऋणात्मक मान से भी ज्ञात किया जाता है अर्थात् $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m$ ।

परन्तु जब कोई आवेश किसी त्वरण से गतिशील होता है या दोलनीय अथवा कम्पनिक गति करता है तो ऐसे निकाय से दोनों विद्युत और चुम्बकीय क्षेत्रों की एक साथ उत्पत्ति होती है जिनका मान समय के साथ परिवर्तित होता है। समग्र रुप से इस क्षेत्र को विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र कहते हैं। इस क्षेत्र की मात्रात्तमक एवं गुणात्मक व्याख्या हेतु जिन मूलभूत समीकरणों या व्यंजकों या सूत्रों की आवश्यकता होती है उन्हें मैक्सवेल समीकरण कहते हैं। मैक्सवेल समीकरण वास्तव में विद्युत क्षेत्र,

चुम्बकीय क्षेत्र तथा विद्युतचुम्बकीय प्रेरण से सम्बन्धित नियमों पर आधारित कुल चार व्यंजक अथवा सूत्र है, जिनको निम्न (इस) प्रकार से समझ सकते हैं।

1. **<u>प्रथम मैक्सवेल समीकरण</u>**: यह स्थिर विद्युत क्षेत्र के गॉउस नियम पर आधारित व्यंजक है। इस नियम के अनुसार, किसी बन्द पृष्ठ से कुल निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान उस पृष्ठ से बद्ध कुल आवेश के $1/\varepsilon$ गुना के बराबर होता है। अर्थात्

$$\oint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon}\oint \rho d\tau \quad \Rightarrow \quad \oint (\vec{\nabla}.\vec{E})d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\oint \rho d\tau$$

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{या} \quad \vec{\nabla}.\vec{D} = \rho} \qquad \because \ \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

इसे प्रथम मैक्सवेल समीकरण कहा जाता है।

2. **<u>द्वितीय मैक्सवेल समीकरण</u>**: यह चुम्बकीय क्षेत्र के गॉउस नियम पर आधारित व्यंजक है। इस नियम के अनुसार, किसी पृष्ठ से कुल निर्गत चुम्बकीय फ्लक्स का मान शून्य के बराबर होता है। अर्थात्

$$\oint \vec{B}.d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \oint (\vec{\nabla}.\vec{B})d\tau = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad \text{या} \quad \vec{\nabla}.\vec{H} = 0} \qquad \because \ \vec{B} = \mu \vec{H}$$

इसे द्वितीय मैक्सवेल समीकरण कहा जाता है। यह समीकरण निरुपित करता है कि एकल ध्रुव असम्भव है तथा चुम्बकीय बल रेखायें बन्द वक्र होती हैं।

3. **<u>तृतीय मैक्सवेल समीकरण</u>**: यह विद्युतचुम्बकीय प्रेरण से सम्बन्धित फैराडे के नियम पर आधारित व्यंजक है। इस नियम के अनुसार, किसी कुण्डली में उत्पन्न प्रेरित वि0वा0व0, उस कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स परिवर्तन दर के ऋणात्मक मान के बराबर होता है। अर्थात्

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\oint \vec{B}.d\vec{s} \quad \Rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\oint \vec{B}.d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \oint \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right).d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\oint \vec{B}.d\vec{s}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad \text{या} \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt}} \qquad \because \ \vec{B} = \mu \vec{H}$$

इसे तृतीय मैक्सवेल समीकरण कहा जाता है।

4. **<u>चतुर्थ मैक्सवेल समीकरण</u>**: यह चुम्बकीय क्षेत्र से सम्बन्धित एम्पियर नियम के मैक्सवेल संशोधन पर आधारित व्यंजक है। एम्पियर नियम के अनुसार, किसी बन्द परिपथ (एम्पिरियन लूप) के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का रेखीय

समाकलन उस बन्द परिपथ में समाहित कुल धारा के μ (पारगम्यताः निरपेक्ष चुम्बकशीलता) गुना के बराबर होता है। अर्थात्

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu I$$

$$\Rightarrow \quad \oint \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right).d\vec{s} = \mu \oint \vec{J}.d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}$$

यह व्यंजक एम्पियर नियम का अवकल रुप कहलाता है। इस व्यंजक का दोनों तरफ से कर्ल लेने पर $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$ देता है तथा इस निष्कर्ष को सातत्यता समीकरण में रखने पर $d\rho/dt = 0$ या $\rho =$ नियत प्रदान करता है। यह स्पष्ट करता है कि एम्पियर नियम तभी वैध है जबकि आवेश स्थिर चाल से गतिशील हो अथवा आवेश घनत्व नियत हो। मैक्सवेल ने बताया कि आवेश घनत्व नियत न होने या आवेश के त्वरित होने पर एक अन्य धारा का उद्‌भव होता है जिसे विस्थापन धारा i_D (डिसप्लेसमेंट करंट) कहते है। यह धारा समय के साथ विद्युत फ्लक्स बदलने के कारण उत्पन्न होता है। इस उत्पन्न विद्युत धारा से सम्बन्धित धारा घनत्व को विस्थापन धारा घनत्व J_D (डिसप्लेसमेंट करंट डेन्सीटी) कहते है। विस्थापन धारा घनत्व J_D का मान विस्थापन सदिश (डिसप्लेसमेंट वेक्टर) के परिवर्तन दर के बराबर होता है। क्योंकि,

$$i_D = \varepsilon \frac{d\varphi_e}{dt} = \varepsilon \frac{d(EA)}{dt} = A \frac{d(\varepsilon E)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{i_D}{A} = \frac{d(\varepsilon E)}{dt} \Rightarrow \vec{J}_D = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

अतः मैक्सवेल के अनुसार, समय परिवर्ती विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र के लिए कुल धारा घनत्व का मान मुक्त धारा एवं विस्थापन धारा घनत्वों के योग के बराबर होता है। इस प्रकार मैक्सवेल संशोधित एम्पियर नियम हेतु निम्न व्यंजक प्राप्त होता है।

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\left(\vec{J} + \vec{J}_D\right) = \mu\left(\vec{J} + \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt}\right)}$$

या

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D = \vec{J} + \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt}}$$

इसे चतुर्थ मैक्सवेल समीकरण कहा जाता है।

उपर्युक्त इन सभी चारों समीकरणों को मैक्सवेल समीकरण कहते है। इन समीकरणों का उपयोग करके समदैशिक (मुक्त आकाश, निर्वात, हवा, कॉच इत्यादि), असमदैशिक (क्वार्टज, कैलसाइट इत्यादि), विघटनकारी (चालक इत्यादि) माध्यमों में समय परिवर्ती विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र की मात्रात्मक एवं गुणात्मक व्याख्या की जा सकती है। अब हम मुक्त आकाश या निर्वात माध्यम में समय परिवर्ती विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र/तरंग के चारित्रिक गुणों को समझेंगें।

मुक्त आकाश या निर्वात में विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र/तरंग के चारित्रिक गुण

मुक्त आकाश या निर्वात एक समदैशिक माध्यम होता है जिसके स्थूल गुण दिशाओं पर निर्भर नहीं होते हैं। चूँकि इस माध्यम में मुक्त इलेक्ट्रान या आवेश वाहक नहीं होते हैं अतः इस माध्यम हेतु मुक्त आवेश घनत्व, चालकता तथा मुक्त धारा घनत्व शून्य होती है अर्थात् $\rho = 0; \sigma = 0; \vec{J} = 0$ । साथ ही साथ इस माध्यम के लिए आपेक्षिक विद्युतशीलता या परावैद्युतांक ε_r एवं आपेक्षिक पारगम्यता μ_r का मान एक होता है अतः $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = \varepsilon_0;\ \mu = \mu_r\mu_0 = \mu_0$ । इन विशेषताओं को मैक्सवेल समीकरणों में रखने व हल करने पर हमें $\vec{E}$ और $\vec{H}$ में दो द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं। अर्थात्

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{H} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\frac{d\vec{H}}{dt} \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt} \qquad (4)$$

समीकरण (3) का कर्ल लेने तथा समीकरणों (1) और (4) से मान रखने पर,

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\mu_0\vec{\nabla}\times\frac{d\vec{H}}{dt} \quad \Rightarrow \left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right)\vec{\nabla} - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)$$

$$\Rightarrow\ 0 - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow\ \nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} \qquad (5)$$

इसी प्रकार समीकरण (4) का कर्ल लेने तथा समीकरणों (2) और (3) से मान रखने पर,

$$\nabla^2\vec{H} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{H}}{dt^2} \qquad (6)$$

व्यंजक (5) और (6), निर्वात में $\vec{E}$ और $\vec{H}$ के लिए दो द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण है। चूकिं प्राप्त अवकल समीकरण, प्रगामी तरंग के अवकल समीकरण के समतुल्य पाये गये अतः इसके आधार पर यह कहा जा सकता है कि जब कोई आवेश निर्वात में किसी त्वरण से गतिशील होता है या दोलनीय अथवा कम्पनिक गति करता है तो माध्यम में उत्पन्न विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र का व्यवहार प्रगामी तरंग जैसा होता है। अर्थात् अवकल समीकरणों (5) और (6) के हल को प्रगामी तरंग के व्यंजक से निरुपित कर सकते हैं।

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{j(\vec{K}.\vec{r}-\omega t)} \quad \text{तथा} \quad \vec{H} = \vec{H}_0\, e^{j(\vec{K}.\vec{r}-\omega t)} \qquad (7)$$

यहाँ ω तथा K प्रगामी तरंग की आवृत्ति एवं तरंग संचरण सदिश हैं।

विद्युतचुम्बकीय तरंग की अनुप्रस्थ प्रकृतिः

जब प्रगामी तरंग $\vec{E}$ तथा $\vec{H}$ के मानों को मैक्सवेल समीकरणों में रखते हैं तो हमें प्राप्त होता है कि,

$$\vec{K}.\vec{E}=0\ ; \quad \vec{K}.\vec{H}=0\ ; \quad \vec{K}\times\vec{E}=\mu_0\omega\vec{H}; \quad \vec{K}\times\vec{H}=-\varepsilon_0\omega\vec{E}$$

$\vec{K}.\vec{E}=0$ यह बताता है कि तरंग संचरण सदिश $\vec{K}$ तथा विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ के आपस में अभिलम्बत होते हैं तथा $\vec{K}.\vec{H}=0$ यह निरुपित करता है कि तरंग संचरण सदिश $\vec{K}$, चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{H}$ के अभिलम्बत होता है। तृतीय व्यंजक यह निरुपित करता है कि दोनों तरंग संचरण सदिश $\vec{K}$ और विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$, चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{H}$ के अभिलम्बत होते हैं जबकि चतुर्थ व्यंजक यह प्रदर्शित करता है कि दोनों तरंग संचरण सदिश $\vec{K}$ और चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{H}$, विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ के अभिलम्बत होते हैं। अतः चारों व्यंजक समग्र रुप से यह सिद्ध करते है कि $\vec{K}$, $\vec{E}$ और $\vec{H}$ आपस में अभिलम्बत होते हैं। अर्थात् विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र सदिश, तरंग संचरण की दिशा के अभिलम्बत कम्पन करते हैं। अतः विद्युतचुम्बकीय तरंगे, अनुप्रस्थ तरंगे होती है।

निर्वात में विद्युतचुम्बकीय तरंग की चालः

जब विद्युतचुम्बकीय तरंग हेतु, $\vec{E}$ तथा $\vec{H}$ के अवकल समीकरणों की तूलना प्रगामी तरंग से करते हैं तो निर्वात में विद्युतचुम्बकीय तरंग की चाल का मान हमें $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ प्राप्त होता है जिसे हल करने पर यह प्रकाश की चाल के बराबर आता है। अर्थात्

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}=\sqrt{10^7\times9\times10^9}=3\times10^8=c$$

अतः निर्वात में विद्युतचुम्बकीय तरंगे, प्रकाश की चाल से गतिमान होती है।

निर्वात या मुक्त आकाश माध्यम की प्रतिबाधाः

निर्वात में विद्युतचुम्बकीय तरंग के, $\vec{E}$ तथा $\vec{H}$ के परिमाणों के अनुपात को निर्वात की प्रतिबाधा कहते है। इसे Z_0 से प्रदर्शित किया जाता है। अतः,

$$Z_0=\frac{E}{H}=\mu_0 c=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\,\Omega$$

अतः निर्वात या मुक्त आकाश की प्रतिबाधा का मान 120π ओम होता है।

निर्वात में विद्युतचुम्बकीय तरंग का ऊर्जा घनत्वः

प्रति एकांक आयतन की ऊर्जा को ऊर्जा घनत्व कहते हैं। चूकिं विद्युतचुम्बकीय तरंग में दो तरह के क्षेत्र होते हैं अतः विद्युतचुम्बकीय तरंग का ऊर्जा घनत्व, विद्युत एवं चुम्बकीय ऊर्जा घनत्वों के योग के बराबर होता है। अर्थात् $u=u_e+u_m$। साथ ही साथ समदैशिक माध्यम हेतु विद्युत एवं चुम्बकीय ऊर्जा घनत्वों का अनुपात एकांक होता है अतः विद्युतचुम्बकीय तरंग का ऊर्जा घनत्व, विद्युत ऊर्जा घनत्व के दुगुने के बराबर होता है। अर्थात् $u=2u_e=\varepsilon_0E^2$। इससे यह स्पष्ट होता है कि विद्युतचुम्बकीय तरंग का औसत ऊर्जा घनत्व $\varepsilon_0E_{rms}^2$ होता है।

पोइंटिंग वेक्टर या सदिशः

विद्युतचुम्बकीय तरंग के संचरण की दिशा के लम्बवत् लिए गये एकांक क्षेत्रफल से होकर प्रति सेकण्ड प्रवाहित ऊर्जा पोइंटिंग वेक्टर कहलाता है। इसे $\vec{S}$ से प्रदर्शित किया जाता है तथा इसका मान $\vec{E}$ और $\vec{H}$ के क्रास गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात् $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$। यह सदिश बताता है कि ऊर्जा सदैव तरंग संचरण की दिशा में प्रवाहित होता है। $\vec{E}$ और $\vec{H}$ के मानों को रखकर हल करने पर यह प्राप्त होता है कि पोइंटिंग वेक्टर का औसत मान (ऊर्जा फ्लक्स), तरंग के वेग, औसत ऊर्जा घनत्व एवं तरंग संचरण की दिशा में एकांक सदिश के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात् $<\vec{S}>=c<u>\vec{n}$।

पोइंटिंग थ्योरम् या प्रमेयः

यह प्रमेय ऊर्जा (शक्ति) के संरक्षी सिद्धांत पर आधारित है। जब कोई विद्युतचुम्बकीय तरंग किसी माध्यम से प्रवाहित होता है तो माध्यम के एकांक आयतन को दी गयी कुल शक्ति का मान$(-\vec{J}.\vec{E})$, उस आयतन से सम्बंधित विद्युतचुम्बकीय ऊर्जा परिवर्तन दर (du/dt) तथा सीमा सतह से प्रति सेकण्ड प्रवाहित ऊर्जा $(\vec{\nabla}.\vec{S})$के योग के बराबर होता है। अर्थात्

$$-\vec{J}.\vec{E}=\frac{du}{dt}+\vec{\nabla}.\vec{S}$$

यह समीकरण पोइंटिंग थ्योरम् के गणितीय रुप को प्रदर्शित करता है।
इस प्रकार आज के परिचर्चा में मैक्सवेल समीकरणों तथा निर्वात में विद्युतचुम्बकीय तरंग के गुणों के बारें में जानकारी प्राप्त की।

अन्य आनलाइन श्रोतः

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_radiation
3. http://web.mit.edu/viz/EM/visualizations/notes/modules/guide13.pdf
4. https://www.cis.rit.edu/class/simg712-01/notes/basicprinciples-06.pdf
5. http://staff.ustc.edu.cn/~bjye/em/MIT-10-1.pdf
6. http://indico.ictp.it/event/a14229/session/0/contribution/1/material/slides/0.pdf
7. http://indico.ictp.it/event/a14229/session/0/contribution/1/material/slides/0.pdf
8. https://www.physast.uga.edu/classes/phys3330/zhao/downloads/download/1175.pdf
9. https://dkpandey.weebly.com/uploads/1/3/5/3/13534845/maxwell_equation_em_wave.pdf
10. https://dkpandey.weebly.com/uploads/1/3/5/3/13534845/em_wave_in_different_mediums.pdf

अन्य आनलाइन विडियो श्रोतः

1. https://www.youtube.com/watch?v=Pk4ec6mOuyQ
2. https://www.youtube.com/watch?v=bwreHReBH2A
3. https://www.youtube.com/watch?v=nFtNCPUMoYA
4. https://www.youtube.com/watch?v=UBTk1eru3Tc
5. https://www.youtube.com/watch?v=JgSXQorBQSk